



## Matemáticas y sus fronteras

- [BLOGS madri+d](#)
- [PORTADA BLOG](#)
- [GALERIAS IMAGENES](#)

## Más allá del formalismo: aplicaciones de teoría de grupos

Publicado por [Instituto de Ciencias Matemáticas](#) el **4 febrero, 2016** [Editar](#)  
[Comentarios \(1\)](#)

[Tweet](#)

La mayoría de lectores estará familiarizado con la teoría de grupos y son conscientes de su influencia en el álgebra moderna. Muchos, además, serán expertos en el manejo de esta estructura algebraica.



Desde el punto de vista matemático, la teoría de grupos se reduce a conceptos abstractos y super elaborados: grupos topológicos, grupos de transformaciones, teoría geométrica y combinatoria de grupos o teoría de sus representaciones. Son muchos los resultados obtenidos fruto de la investigación en este terreno: un hito de los años 70 fue la clasificación de los grupos simples, finito dimensionales. Desde el punto de vista formal, la teoría tiene una gran belleza y para un matemático basta el deleite de un enunciado conciso: *“Cualquier grupo simple, finito es isomorfo a un grupo cíclico de orden primo, a un grupo alternante de orden cinco o superior, a un grupo de Lie simple (incluyéndose los grupos clásicos conocidos: unitario, simplético, ortogonal...) o a un grupo*

*esporádico (uno de los 26 grupos excepcionales o twisted)*”.-Teorema de Jordan-Hölder.

Sin embargo, aparte de la aparente simplicidad y precisión del enunciado (su demostración ocupa miles de páginas con contribuciones de más de cien autores), existen grandes aplicaciones de la teoría de grupos en otras disciplinas científicas. En particular, durante la segunda mitad del siglo XX, la teoría de grupos se ve afectada por las simetrías continuas (influenciadas por los *grupos de Weyl*, grupos finitos generados por reflexiones actuando en el espacio euclidiano), originando los grupos de Lie y sus técnicas asociadas: simetrías de Lie y grupos de transformaciones, que han servido de gran apoyo en la resolución de ecuaciones diferenciales: de constante aparición en modelos físicos, matemáticos, financieros o biomédicos. Por ejemplo, el átomo de hidrógeno es representado por el grupo de simetrías  $SO(4)$ .

Otro ejemplo importante en la Mecánica Cuántica es la invarianza de las funciones de ondas bajo el grupo de simetrías  $U(1)$ , es decir, las funciones de onda desencadenan la misma fenomenología física aunque presenten un cambio de fase tipo  $e^{i\alpha}$ .

El enunciado anterior puede comprobarse trivialmente hallando la densidad de probabilidad  $P$  de que una partícula se encuentre inmersa en una región del espacio. El cálculo se realiza de la siguiente forma:

$$P = \int_V \Phi \Phi^* dr$$

donde  $\Phi$  es la función de onda en un espacio de Hilbert  $H$ ,  $\Phi^*$  es su conjugada compleja y  $dr$  es el diferencial de volumen. Está claro la densidad de probabilidad es invariante bajo transformaciones  $\Phi \rightarrow e^{i\alpha} \Phi$ , siempre que se encuentren combinaciones de la función de onda y su complejo conjugada.

Una de las disciplinas científicas más famosas por el uso de la teoría de grupos es la física de partículas. En 1969, el físico estadounidense Gell-mann predijo la existencia la partícula  $\Omega$ , una pieza fundamental en el incompleto modelo de  $SU(3)$  de sabor.

Acostumbrados a la intuición física, este caso supuso un claro ejemplo de intuición matemática, lejana a las evidencias experimentales (probadas cuatro años después del postulado de existencia, en el laboratorio de física de partículas de Brookhaven).

Hasta el momento, las cuatro interacciones fundamentales en la naturaleza (interacción fuerte, débil, electromagnética y gravitatoria) habían sugerido la existencia de familias de partículas con una serie de propiedades. Dependiendo de su interacción, se hizo una primera clasificación en *leptones* y *hadrones*, aquellas que no interactúan “fuerte” (transparentes a esta interacción) y las que sí, respectivamente. Los componentes fundamentales de los hadrones se denominan *quarks*.

Tres generaciones de la materia (fermiones)

|          | I   | II  | III   |
|----------|---|---|---|
| masa →   | 2.4 MeV   | 1.27 GeV  | 171.2 GeV   |
| carga →  | $\frac{2}{3}$                                     | $\frac{2}{3}$                                   | $\frac{2}{3}$                                     |
| espín →  | $\frac{1}{2}$                                     | $\frac{1}{2}$                                   | $\frac{1}{2}$                                     |
| nombre → | <b>u</b><br>arriba                                | <b>c</b><br>encanto                             | <b>t</b><br>cima                                  |
|          | 4.8 MeV   | 104 MeV   | 4.2 GeV   |
|          | $-\frac{1}{3}$                                    | $-\frac{1}{3}$                                  | $-\frac{1}{3}$                                    |
|          | $\frac{1}{2}$                                     | $\frac{1}{2}$                                   | $\frac{1}{2}$                                     |
|          | <b>d</b><br>abajo                                 | <b>s</b><br>extraño                             | <b>b</b><br>fondo                                 |
|          | <2.2 eV   | <0.17 MeV                                       | <15.5 MeV   |
|          | 0   | 0   | 0   |
|          | $\frac{1}{2}$                                     | $\frac{1}{2}$                                   | $\frac{1}{2}$                                     |
|          | <b><math>\nu_e</math></b><br>neutrino electrónico | <b><math>\nu_\mu</math></b><br>neutrino muónico | <b><math>\nu_\tau</math></b><br>neutrino tauónico |
|          | 0.511 MeV   | 105.7 MeV                                       | 1.777 GeV   |
|          | -1  | -1  | -1  |
|          | $\frac{1}{2}$                                     | $\frac{1}{2}$                                   | $\frac{1}{2}$                                     |
|          | <b>e</b><br>electrón                              | <b><math>\mu</math></b><br>muón                 | <b><math>\tau</math></b><br>tauón                 |

| Quarks           |                     |                    | Antiquarks                                |  |   |
|------------------|---------------------|--------------------|---|--|---|
| 1                | 2                   | 3                  | 3   | 2  | 1                                       |
| Up<br><b>u</b>   | Charm<br><b>c</b>   | Top<br><b>t</b>    | Antitop<br><b><math>\bar{t}</math></b>    | Anticharm<br><b><math>\bar{c}</math></b>   | Antiup<br><b><math>\bar{u}</math></b>   |
| Down<br><b>d</b> | Strange<br><b>s</b> | Bottom<br><b>b</b> | Antibottom<br><b><math>\bar{b}</math></b> | Antistrange<br><b><math>\bar{s}</math></b> | Antidown<br><b><math>\bar{d}</math></b> |

Dentro de los hadrones, se hizo una primera clasificación atendiendo al *spin*, cualidad de las partículas que se manifiesta en la presencia de campos electromagnéticos (recordatorio: si las partículas tienen spin semientero se denominan *fermiones* y si es entero, son *bosones*), y una segunda subclasificación dentro de los posibles spines enteros y semienteros: la representación de las partículas atendiendo a su *spin isotópico* o *isospín*. El isospín es otra propiedad intrínseca de las partículas, dependiente de su contenido quark. Las partículas fundamentales contempladas por grupo de simetrías global  $SU(3)$  sabor están compuestas principalmente por los tres quarks más ligeros *u*, *d* y *s*, que son los denominados *sabores*. Así, los hadrones se denominarán *bariones* si contienen tres quarks o *mesones* si contienen un quark y un antiquark. Existen partículas *exóticas* que no siguen estas reglas de contenido quark.

La genial idea de Gell-Mann fue hacer las representaciones irreducibles de  $SU(3)$  sabor atendiendo al spin de los fermiones más ligeros ( $1/2$ ) y su primera excitación, con spin  $3/2$  y los bosones más ligeros (con spin 0 y su primeras excitaciones, con spin 1). Si se representa cada partícula con las mencionadas propiedades en unos ejes coordenados en los que se representan la proyección de isospín y la *hipercarga* (magnitud física que combina el número bariónico y la propiedad extrañeza), se obtienen los diagramas a continuación. Notar que  $I_3$  o  $T_3$  es la mencionada proyección de isospín e *Y* representa la hipercarga.

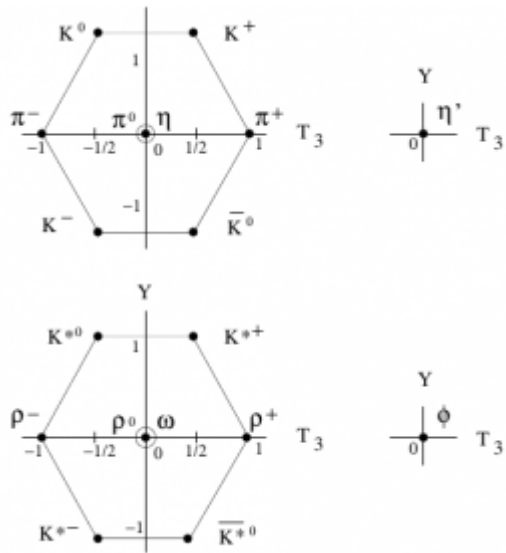


Figura 1: mesones spin 0 y excitación spin 1

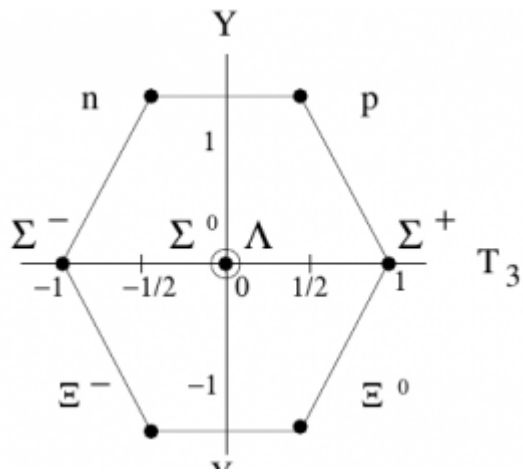


Figura 2: bariones spin 1/2

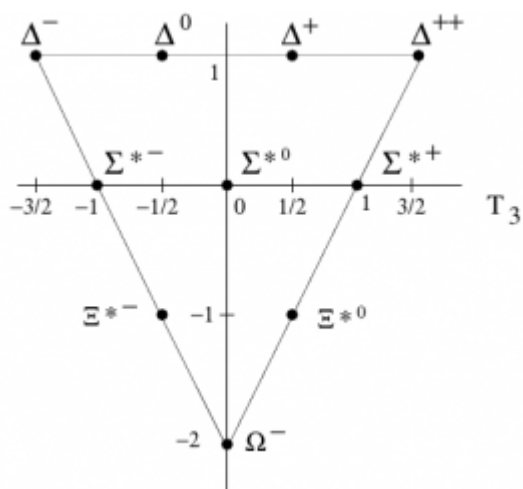


Figura 3: excitación bariones spin 3/2

El resultado fue los *octetes* (a pesar de ser hexágonos existen dos partículas en el centro, de ahí que sea un octete) representaban las propiedades físicas de las partículas conocidas. En el caso del *decuplete* (o sea, el triángulo), las partículas señaladas eran conocidas excepto la  $\Omega$  situada en el pico. Esta representación pictórica de una idea abstracta matemática, fue la que indicó que debería existir otra partícula que completara el decuplete. Y así fue como, posteriormente, el modelo  $SU(3)$  sabor pudo completarse adecuadamente.

No obstante, en los últimos tiempos, parece que el modelo estándar se tambalea, debido a la existencia de teorías superiores y que poco a poco, podrán corroborarse experimentalmente debido a la infraestructura que estamos construyendo, como el acelerador-detector LHC (*Large Hadron Collider*). Sin embargo, otra pieza clave del puzzle fue corroborada en 4 de Julio del 2012, en la que se probaba la existencia del *bosón de Higgs*, o partícula encargada de la dotación de masa de las partículas del modelo estándar. Este descubrimiento reafirmó la base teórica del modelo estándar, sin embargo, los experimentos posteriores, aún no anunciados oficialmente, parecen apuntar la existencia de más de un bosón de Higgs, lo que de nuevo, nos llevaría a una redefinición del modelo estándar. No obstante, a día de hoy, el modelo estándar sigue presentándose como el modelo de grupo de simetrías gauge  $SU(2) \times SU(3) \times U(1)$ , que se corresponden, respectivamente, con los grupos asociados al *isospin débil*, *color* (otra propiedad de las partículas interactuando en un campo *fuerte*) y la *hipercarga débil*. Sin embargo, el grupo gauge no tiene cabida en este breve comentario de cómo la teoría de grupos, una teoría matemática estrictamente abstracta, contribuyó en la predicción de un modelo físico.

Quepa esta anotación teórico-histórica para convencer a matemáticos recalcitrantes, que la aplicación de una teoría matemática al mundo que nos rodea, puede conducirnos a resultados excepcionales, más allá de lo esperado, que no sólo existe la belleza en un enunciado formal, autocontenido y lógico, sino que la naturaleza es caprichosa y nos brinda muchos secretos que aún hemos de descubrir.

---

**Christina Sardón**, Salamanca

Tweet

Me gusta

113

Share

0

G+1

1

[Compartir](#)

**Etiquetas:**

[General](#)



Si te gustó esta entrada anímate a [escribir un comentario](#) o [suscribirte al feed](#) y obtener los artículos futuros en tu lector de feeds.

Comentarios

Comentario by PE el 21 febrero 2016 @ [11:09](#) | [Editar](#)

Interesante

Escribe un comentario

Registrado como [Instituto de Ciencias Matemáticas](#). [Salir »](#)

Tu Comentario



Enviar



- [Buscar](#)

## Buscar

Buscar en el blog...



- 

febrero 2016

**L M X J V S D**

[1](#) 2 3 [4](#) 5 6 7

8 [9](#) 10 11 12 13 14

15 16 17 18 [19](#) 20 21

22 [23](#) 24 25 [26](#) 27 28

[29](#)

[« ene](#)      [mar »](#)

## • Contador de visitas

00467721

## • Archivos

- [marzo 2016](#)
- [febrero 2016](#)
- [enero 2016](#)
- [diciembre 2015](#)
- [noviembre 2015](#)
- [octubre 2015](#)
- [septiembre 2015](#)
- [agosto 2015](#)

- [julio 2015](#)
- [junio 2015](#)
- [mayo 2015](#)
- [abril 2015](#)
- [marzo 2015](#)
- [febrero 2015](#)
- [enero 2015](#)
- [diciembre 2014](#)
- [noviembre 2014](#)
- [octubre 2014](#)
- [septiembre 2014](#)
- [agosto 2014](#)
- [julio 2014](#)
- [junio 2014](#)
- [mayo 2014](#)
- [abril 2014](#)
- [marzo 2014](#)
- [febrero 2014](#)
- [enero 2014](#)
- [diciembre 2013](#)
- [noviembre 2013](#)
- [octubre 2013](#)
- [septiembre 2013](#)
- [agosto 2013](#)
- [julio 2013](#)
- [junio 2013](#)
- [mayo 2013](#)
- [abril 2013](#)
- [marzo 2013](#)
- [febrero 2013](#)
- [enero 2013](#)
- [diciembre 2012](#)
- [noviembre 2012](#)
- [octubre 2012](#)
- [septiembre 2012](#)
- [agosto 2012](#)
- [julio 2012](#)
- [junio 2012](#)
- [mayo 2012](#)
- [abril 2012](#)
- [marzo 2012](#)
- [febrero 2012](#)
- [enero 2012](#)
- [diciembre 2011](#)
- [noviembre 2011](#)
- [octubre 2011](#)
- [septiembre 2011](#)
- [agosto 2011](#)
- [julio 2011](#)
- [junio 2011](#)
- [mayo 2011](#)

- [abril 2011](#)
- [marzo 2011](#)
- [febrero 2011](#)
- [enero 2011](#)
- [diciembre 2010](#)
- [noviembre 2010](#)
- [octubre 2010](#)
- [septiembre 2010](#)
- [agosto 2010](#)
- [julio 2010](#)
- [junio 2010](#)
- [mayo 2010](#)
- [abril 2010](#)
- [marzo 2010](#)
- [febrero 2010](#)
- [enero 2010](#)
- [diciembre 2009](#)
- [noviembre 2009](#)
- [octubre 2009](#)
- [septiembre 2009](#)
- [agosto 2009](#)
- [julio 2009](#)
- [junio 2009](#)
- [mayo 2009](#)
- [abril 2009](#)
- [marzo 2009](#)
- [febrero 2009](#)
- [enero 2009](#)
- [diciembre 2008](#)
- [noviembre 2008](#)
- [octubre 2008](#)
- [septiembre 2008](#)
- [agosto 2008](#)
- [julio 2008](#)
- [junio 2008](#)
- [mayo 2008](#)
- [abril 2008](#)
- [marzo 2008](#)
- [febrero 2008](#)
- [enero 2008](#)
- [diciembre 2007](#)
- [noviembre 2007](#)
- [octubre 2007](#)
- [septiembre 2007](#)
- [agosto 2007](#)
- [julio 2007](#)
- [junio 2007](#)
- [mayo 2007](#)
- [abril 2007](#)
- [marzo 2007](#)
- [febrero 2007](#)



- [enero 2007](#)
- [diciembre 2006](#)
- [noviembre 2006](#)
- [octubre 2006](#)
- [septiembre 2006](#)
- [agosto 2006](#)
- [julio 2006](#)
- [junio 2006](#)

## • Entradas recientes

- [Introducción a la investigación matemática para estudiantes de grado](#)
- [Las matemáticas del arcoíris](#)
- [Obsesiones matemáticas](#)
- [Las matemáticas de la luz](#)
- [Conocer el ICMAT desde dentro](#)
- [Un Fisquito de Matemáticas](#)
- [Más allá del formalismo: aplicaciones de teoría de grupos](#)
- [Datos en ICSU](#)
- [Primera lección de danza clásica para matemáticos](#)
- [Noticias de la Red Temática de Geometría, Mecánica y Control](#)

## • Enlaces

- [DivulgaMAT](#)
- [ESTALMAT](#)
- [i-MATH](#)
- [Instituto de Ciencias Matemáticas](#)
- [La Hoja Volante](#)
- [MATEMATICALIA](#)

## • WEBLOGS

- [:: ZTFNews.org](#)
- [Bloc de la Biblioteca de Matemàtiques](#)
- [Blog para anti-maticos](#)
- [BUCM :: 2+2=5 :: Biblioteca Complutense](#)
- [Complejidad](#)
- [Democracia electronica](#)
- [Francis \(th\)E mule Science's News](#)
- [Gaussianos](#)
- [MATBUS](#)
- [Michael Trick's Operations Research Blog](#)

## • Páginas

- [GALERIAS IMAGENES](#)

## • Comentarios recientes

- JOSE DAVID AREVALO COBOS en [Conocer el ICMAT desde dentro](#)
- JOSE DAVID AREVALO COBOS en [Conocer el ICMAT desde dentro](#)
- JOSE DAVID AREVALO COBOS en [Obsesiones matemáticas](#)
- [Todo entero positivo es suma de tres capicúas \(por Javier Cilleruelo\) | Gaussianos](#) en [Florian Luca en los coloquios ICMAT-UAM](#)
- José David Arèvalo Cobos en [Las matemáticas de la luz](#)

## • Etiquetas

[Actividades científicas](#) [Actividades de divulgación](#) [Actividades de divulgación](#) [AIMS2014](#) [Año Internacional Cristalografía](#) [Coloquios ICMAT-UAM](#) [CSIC](#) [Estudiantes](#) [Historia de las matemáticas](#) [ICM2014](#) [ICMAT](#) [ICMAT Newsletter](#) [investigadores](#) [Matemáticas en España](#) [Premios](#) [Reseña](#) [Resolución de ecuaciones](#) [Severo Ochoa](#)

## • Acceso usuarios

- [Administrador del sitio](#)  
[Desconectar](#)
- [Inicio](#)
- [GALERIAS IMAGENES](#)
- - [Desconectar](#)